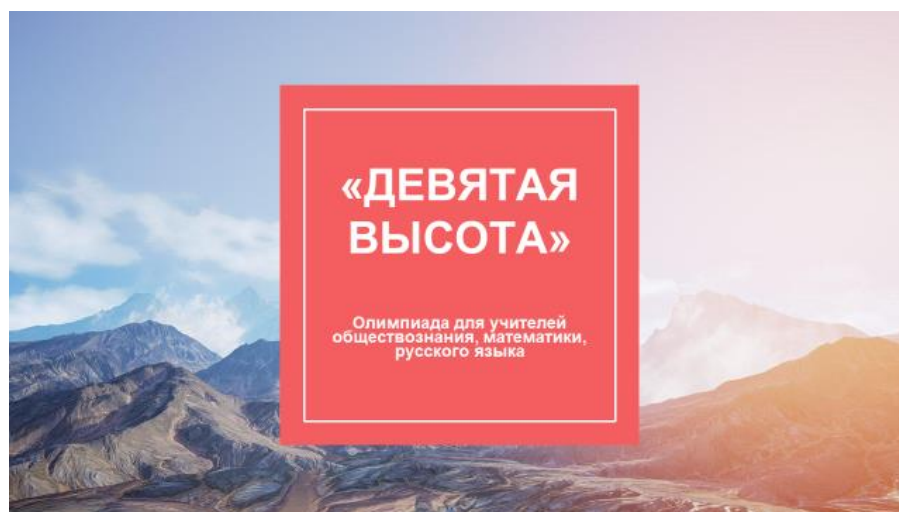




Отборочный этап олимпиады для учителей математики «Девятая высота»

Отборочный этап представляет собой экзаменационную работу в формате ЕГЭ, которая состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки заполняются яркими чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

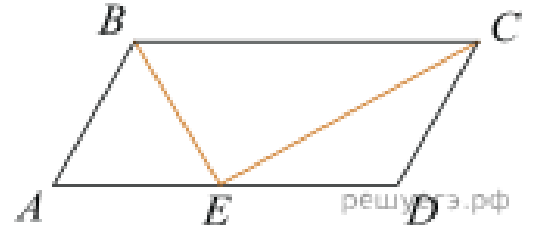
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

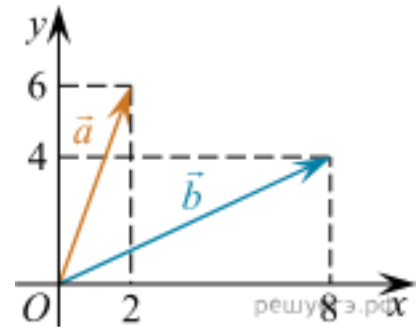
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Часть 1

1. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 50. Найдите его большую сторону.



2. Найдите квадрат длины вектора: $\vec{a} + \vec{b}$.



3. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



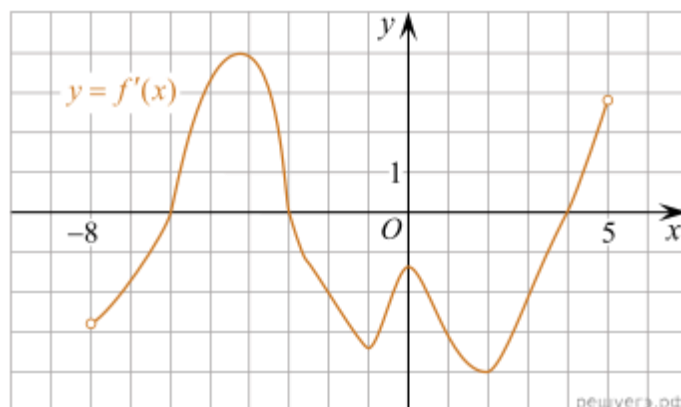
4. В группе туристов 20 человек. Их вертолётom в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолётa.
5. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковы. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

6. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}$.

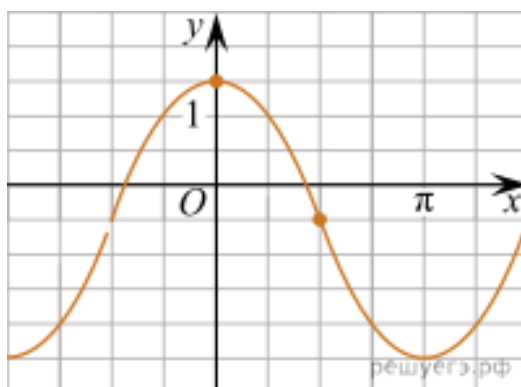
В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

7. Найдите значение выражения $\log_3 11 \cdot \log_{11} 27$.

8. На рисунке изображён график – $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 12$ или совпадает с ней.



9. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.?
10. Бригада маляров красит забор длиной 270 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 90 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.
11. На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .



12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 3)^2(x + 5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.

Часть 2

13. а) Решите уравнение $2 \sin x + 2\sqrt{2} \sin(-x) - 4 \cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки K , L и M соответственно так, что $KLMC$ – равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M – середина ребра $B_1 C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC , если площадь трапеции $KLMC$ равна 6.

15. Решите неравенство: $(\log_{0,25}^2(x+3) - \log_4(x^2 + 6x + 9) + 1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0$.

16. В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тысяч рублей.

17. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , равны 0,6 и 0,8.

а) Докажите подобие треугольников ACD и BCD .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет три различных решения.

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

19. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?

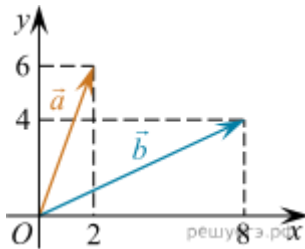
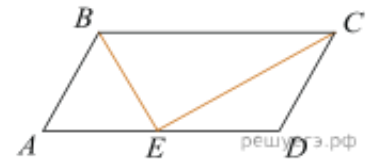
в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Ответы

Часть 1

1. Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 50. Найдите его большую сторону.

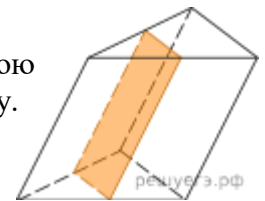
Ответ: 100



2. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.
 Ответ: 200

3. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.

Ответ: 12



4. В группе туристов 20 человек. Их вертолётном в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолёт.

Ответ: 0,25

5. Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Ответ: 0,1

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}.$$

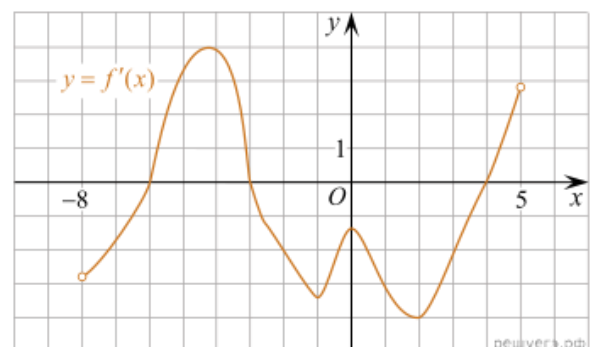
6. Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.
 Ответ: -3

7. Найдите значение выражения $\log_3 11 \cdot \log_{11} 27$.

Ответ: 3

8. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$ — определённой на интервале $(-8; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 12$ или совпадает с ней.

Ответ: 2



9. После дождя уровень воды в колоде может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колоде и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

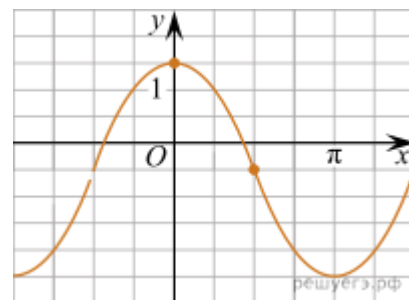
Ответ: 1

10. Бригада маляров красит забор длиной 270 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 90 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Ответ: 6

11. На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите b .

Ответ: -0,5



12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x + 3)^2(x + 5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.

Ответ: -1

Часть 2

13. а) Решите уравнение $2 \sin x + 2\sqrt{2} \sin(-x) - 4 \cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки K , L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 4.

а) Докажите, что точка M — середина ребра $B_1 C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC , если площадь трапеции $KLMC$ равна 6.

Ответ: б) 60° .

15. Решите неравенство: $(\log_{0,25}^2(x+3) - \log_4(x^2 + 6x + 9) + 1) \cdot \log_4(x+2) \leq 0$.

Ответ: $(-2; -1] \cup \{1\}$.

16. В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тысяч рублей.

Ответ: 19 %.

17. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD , равны 0,6 и 0,8.

а) Докажите подобие треугольников ACD и BCD .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Ответ :б) 1

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет три различных решения.

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 4)$

19. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?
- б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Ответ а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.