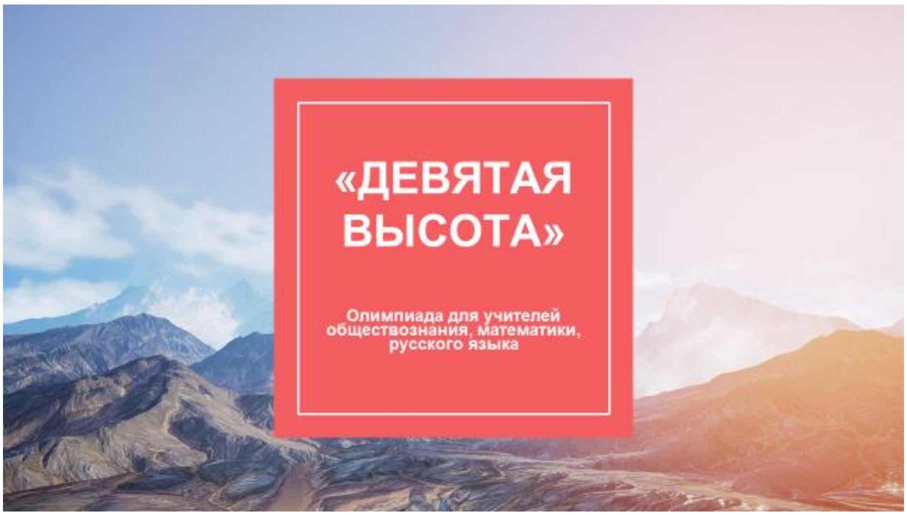
Департамент образования администрации города Екатеринбурга

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение гимназия № 9



Заключительный этап олимпиады для учителей математики

«Девятая высота»

Уважаемый участник олимпиады!

Заключительный этап представляет собой работу в формате муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, которая включает в себя 6 заданий, которые взяты из олимпиад муниципального уровня для разных классов: 1 задача – 11 класс, 2 задачи – 10 класс, 2 задачи – 9 класс и 1 задача – 8 класс.

На выполнение работы отводится 3 часа (180 минут).

Задания считаются выполненными, если Вы вовремя сдали их членам жюри.

Внимательно читайте текст заданий. Ответы переносите в бланк ответов.

На бланке ответа сначала ставьте номер вопроса, на который вы даёте ответ, а затем, справа от номера вопроса, пишите ответ на него. Записи ведите чётко и разборчиво.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Максимально возможное количество первичных баллов за работу – 42.

Желаем успеха!

Екатеринбург, 2025

1. На доску записали несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел. Могло ли так случиться, что и сумма всех четных выписанных чисел — квадрат натурального числа, и сумма всех нечетных выписанных чисел — квадрат натурального числа?

2. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

3. Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $ab + cd = ac - 10bd$. Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

4. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

5. Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать.
   (Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

6. Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб
   (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

Заключительный этап олимпиады для учителей математики

«Девятая высота»

Решения задач и критерии оценивания

За правильное и полное решение каждой задачи – 7 баллов.

1. (8 класс, числа)
На доску записали несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел. Могло ли так случиться, что и сумма всех четных выписанных чисел — квадрат натурального числа, и сумма всех нечетных выписанных чисел — квадрат натурального числа? (А. Кузнецов)

Ответ. Не могло.
Решение. Пусть выписано 2k чисел, начиная с числа n. Тогда одна из двух указанных в условии сумм равна S_1 = n+(n+2)+…+(n+2k–1) = (n+(n+2k–2))·k/2 = (n+k–1)·k, а другая равна S_2 = (n+1)+…+(n+2k–1) = (n+1+(n+2k–1))·k/2 = (n+k)·k. Если же выписано 2k+1 чисел, начиная с числа n, то одна из сумм равна S_1 = (n+1)+(n+3)+…+(n+2k–1) = (n+1+(n+2k–1))·k/2 = (n+k)·k, а другая — S_2 = n+(n+2)+…+(n+2k) = (n+(n+2k))·(k+1)/2 = (n+k)·(k+1). В обоих случаях частное S_2/S_1 равно отношению (m+1)/m двух последовательных натуральных чисел, где m = n+k–1, если выписано 2k чисел, и m = k, если выписано 2k+1 чисел. Допустим, нашлись такие n и k, что $S_1 = u^2$, $S_2 = v^2$, где u и v — натуральные числа. Тогда по доказанному есть такое натуральное m, что $(m+1)u^2 = mv^2$. Можно считать, что числа u и v взаимно просты — иначе поделим u и v на их НОД, и равенство сохранится. Значит, $m = tu^2$. Число t должно быть делителем числа m+1, и так как m и m+1 взаимно просты, то t = 1, и $m = u^2$. Аналогично, $m + 1 = v^2$. Но тогда $v^2 = u^2 + 1$, что невозможно при натуральных u и v, откуда и следует ответ.
Замечание. В случае, когда выписано 2k чисел, есть более простое альтернативное доказательство. В этом случае $S_2 = S_1+k$. При этом S1 ≥ 1+…+(2k–1) = k^2 , то есть если $S_1 = m^2$, то m ≥ k. Но тогда $m^2 < S_2 = m^2+k \le m^2+m < (m+1)^2$, и S_2 не может быть квадратом натурального числа.
Критерии оценивания: Только ответ — 0 баллов. Доказано, что отношение двух сумм равно отношению двух последовательных натуральных чисел, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла. Доказательство годится только для одной из двух возможных чётностей количества чисел — 3 балла. Есть оба указанных выше продвижения, дальнейших содержательных продвижений нет — 4 балла.

2. (9 класс, ММО 77, оценка+пример)
В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых

и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

Ответ. 10.
Решение. Сначала покажем, что k, равного 10, нам хватит. С п о с о б 1. Будем идти вдоль ряда рубашек и считать отдельно белые и фиолетовые рубашки. Как только мы насчитаем 11 одноцветных — допустим, без ограничения общности, фиолетовых — рубашек, остановимся. Теперь снимем все белые рубашки, которые мы прошли (их не больше 10), и все фиолетовые рубашки, до которых мы еще не дошли (их ровно 10). При необходимости снимем еще несколько белых рубашек. Очевидно, что все 11 фиолетовых рубашек висят подряд (все белые рубашки, висевшие между ними, мы сняли). Оставшиеся белые рубашки тоже висят подряд: все оставшиеся фиолетовые рубашки мы сняли. С п о с о б 2. Встанем между 21-й и 22-й рубашкой, тогда слева и справа будет по 21 рубашке. Не умаляя общности, можно считать, что слева белых рубашек не больше, чем фиолетовых. Тогда слева не больше чем 10 белых рубашек, а справа не больше чем 10 фиолетовых (потому что их должно быть столько же, сколько белых слева). Снимем все белые рубашки слева и все фиолетовые рубашки справа. После этого все оставшиеся фиолетовые рубашки будут висеть слева, а все оставшиеся белые — справа. Если мы сняли $n < 10$ рубашек какого-то цвета, то можно снять еще $10 - n$ рубашек этого цвета — выполнение желаемого условия от этого не нарушится. Теперь покажем, что рубашки могут висеть так, что меньшего k нам может не хватить. С п о с о б 1. Допустим, что рубашки висят в следующем порядке: сначала идут 10 белых рубашек, затем 21 фиолетовая и затем еще 11 белых. В этом случае после снятия $k < 10$ рубашек каждого цвета первой и последней рубашкой будут белые. Следовательно, белые рубашки не будут идти подряд. С п о с о б 2. Подходит также любой пример, в котором среди первых 21 рубашки есть 10 белых и 11 фиолетовых, а среди последних — наоборот: 11 белых и 10 фиолетовых. В этом случае после снятия $k < 10$ рубашек в левой и правой половинах останется хотя бы по одной рубашке каждого цвета. Следовательно, рубашки обоих цветов не могут идти подряд.

Критерии оценивания: Только ответ – 0 баллов. Оценка для любого расположения рубашек – 4 балла, пример, что нельзя обойтись меньшим количеством, – 2 балла. Частные случаи – не более 2 баллов.

3. (10 класс, алгебра, делимость)
Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $ab + cd = ac - 10bd$. Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.

Решение. Запишем равенство в виде $a(c - b) = d(c + 10b)$. Так a и d взаимно просты, $c - b$ делится на d: $c - b = md$. Подставив, получим $ma = c + 10b = md + 11b$, то есть $m(a - d) = 11b$. Аналогично, $a - d = nb$, $n(c - b) = 11d$. Перемножив, получим

$121bd = mn(ac - ab - cd + bd) = 11mnbd$. Отсюда $mn = 11$. Следовательно, либо m, либо n равно 1. В первом случае $c = b + d$, во втором – $a = b + d$.

Критерии оценивания: Рассмотрен один из двух случаев – 4 балла.

4. (10кл, геометрия)

В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

Ответ: 45° .

Решение. Пусть H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Тогда высота AT треугольника ABC содержит медиану треугольника AMN, то есть пересекает отрезок MN в его середине — точке E (см. рис. 10.5 а, б). Далее можно рассуждать по-разному. Первый способ. Так как MN || AB, то треугольники ETN и ATB подобны, следовательно, TN : TB = TE : TA = EN : AB = 1: 4 . Пусть TN = x, TE = y, тогда BN = 3x, AE = 3y.

Следовательно, CT = CN − TN = 2x, а EH = (1 :3) AE = y (по свойству точки пересечения медиан треугольника). Заметим, что в прямоугольных треугольниках CTH и BTA CT: BT = 2x: 4x = 1: 2 и HT: AT = 2y: 4y = 1: 2. Значит, эти треугольники подобны. Следовательно, ∠TCH = ∠TBA. Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому эти равные углы являются острыми углами прямоугольного треугольника CQB, то есть каждый из них равен 45°

Второй способ. Отметим точку K — середину стороны AB. Тогда AMNK — параллелограмм, его диагональ MK проходит через середину AN, поэтому она проходит и через точку H. Так как MH || BC, то треугольники EMH и ENT равны (по стороне и двум прилежащим углам), значит, EH = ET. Медиана CK треугольника ABC проходит через точку E и делится в ней пополам, поэтому CHKT — параллелограмм, следовательно, TK || CH. Но CH — часть высоты CQ треугольника ABC, поэтому TK ⊥ AB. Таким образом, TK является высотой и медианой прямоугольного треугольника ATB, значит, этот треугольник — равнобедренный, поэтому ∠ABC = 45°. Существуют и другие способы решения. В частности, несложно доказать, что в данном треугольнике прямая Эйлера OH (O — центр описанной окружности треугольника ABC) параллельна AB. Тогда выполняется равенство $\operatorname{tg} \angle A \cdot \operatorname{tg} \angle B = 3$ (см., например, В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии, №5.110). Используя этот факт и некоторые дополнительные соображения, которые следуют из условия задачи, можно вычислить не только угол ABC, но и остальные углы данного треугольника.

Критерии оценивания: Полное решение – 7 баллов, решение недостаточно обосновано – 1 балл, продвижения, не приводящие к ответу, – 0 баллов.

5. (9 класс, варианты, раскраска)

Из шахматной доски размером 8 × 8 вырезали квадрат размером 2 × 2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1 × 3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

9.6. Из шахматной доски размером 8×8 вырезали квадрат размером 2×2 так, что оставшуюся доску удалось разрезать на прямоугольники размером 1×3. Определите, какой квадрат могли вырезать. (*Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Ответ: могли вырезать любой из девяти квадратов, закрашенных на рисунке 9.6в.

Решение. Раскрасим шахматную доску в три цвета по диагоналям, начиная с левого нижнего угла доски (см. рис. 9.6а). Тогда при разрезании части доски на прямоугольники 1×3 в каждом прямоугольнике окажутся клетки всех трех цветов. Следовательно, после вырезания квадрата клеток каждого из цветов на доске должно остаться поровну. До вырезания на доске 21 клетка цвета 1, 22 клетки цвета 2 и 21 клетка цвета 3.

2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2

Рис. 9.6а

3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1

Рис. 9.6б

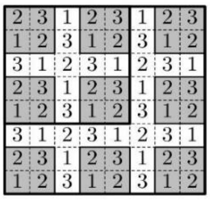


Рис. 9.6в

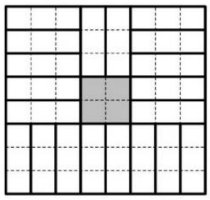


Рис. 9.6г

Следовательно, вырезали квадрат, в котором две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов много. Однако, заметим, что мы можем раскрасить доску еще тремя аналогичными способами — начиная с правого нижнего угла доски, с правого верхнего или с левого верхнего (пример раскраски, начинающейся с правого нижнего угла, см. на рис. 9.6б). При каждом способе раскраски количество клеток каждого цвета остается неизменным.

Следовательно, могли быть вырезаны только те квадраты, которые при любом способе раскраски содержат две клетки цвета 2 и по клетке цвета 1 и 3. Таких квадратов 9, см. рис. 9.6в.

Покажем, как разрезать оставшуюся доску для каждого из девяти случаев. Заметим, что вырезанный квадрат находится в одном из угловых квадратов 5×5, см. рис. 9.6в. То есть, достаточно показать, как разрезать на прямоугольники 1×3 квадрат 5×5 без одного из угловых квадратов 2×2 и оставшуюся часть доски. Это показано на рис. 9.6г.

Критерии проверки:

$+$ *полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ, показано, что другие квадраты не могли быть вырезаны, но не объяснено, как именно проводится разрезание*

$\mp$ *приведен только верный ответ или ответ с указанием, как разрезать оставшуюся часть доски*

$\mp$ *присутствует верная идея раскраски, но допущена ошибка в ответе или решение не доведено до конца*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Критерии оценивания в баллах соответственно:

7 баллов

4-6 баллов

1-3 балла

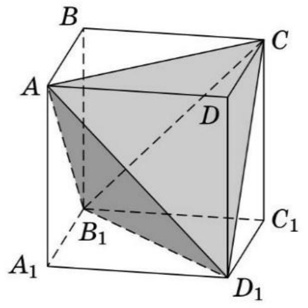
1-3 балла

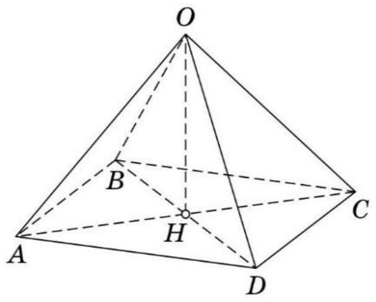
0 баллов.

6. (11 кл, ММО 81, стереометрия)

Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться). (М. А. Евдокимов)

2. *Решение.* Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на части, из которых можно составить две пирамиды (см. рисунок слева). Достаточно заметить, что тетраэдр ACB_1D_1 — правильный с ребром $\sqrt{2}a$,





а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырёхугольную, все рёбра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a = 1/\sqrt{2}$.

Поэтому нужно в исходной правильной четырёхугольной пирамиде $OABCD$ с вершиной O провести высоту OH и разрезать пирамиду плоскостями OHA и OHB на 4 одинаковые части (см. рисунок справа). Приклеив к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $1/\sqrt{2}$.

Критерии оценивания: 4 балла – показано, как разрезать четырехугольную пирамиду и как сложить из частей куб, но нет вычислений; 0 баллов – рассуждения, не приводящие к решению.