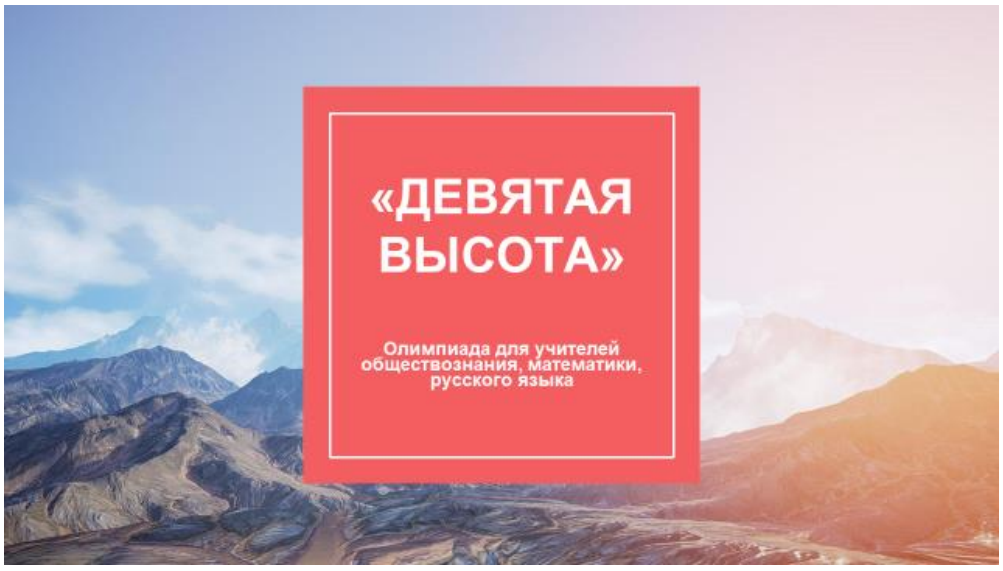
Департамент образования администрации города Екатеринбурга

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение гимназия № 9



Отборочный этап олимпиады для учителей математики «Девятая высота»

Отборочный этап представляет собой экзаменационную работу в формате ЕГЭ, которая состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 14–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки заполняются яркими чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

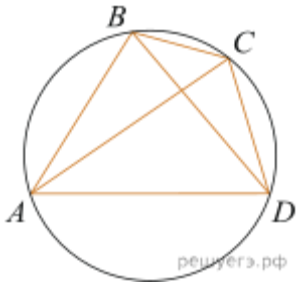
Желаем успеха!

Екатеринбург, 2026

Справочные материалы

$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha;\ cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta;$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$

Часть 1



1. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *ABC* равен 110°, угол *ABD* равен 70°. Найдите угол *CAD*. Ответ дайте в градусах.

2. Даны векторы $\vec{a}(2;0)$ и $\vec{b}(1;4)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.

3. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4, боковое ребро равно 13. Найдите ее объем.

4. В группе туристов 300 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолёта.

5. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

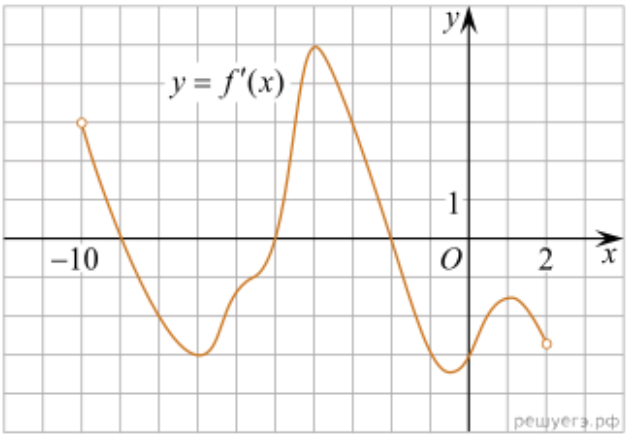
6. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета составляет 70 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш (в рублях)	5	10	200	1000
Количество билетов	500	450	40	10

7. Найдите корень уравнения $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9^x$.

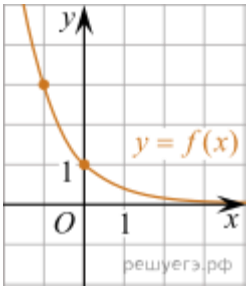
8. Найдите значение выражения $4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}sin^2\frac{7\pi}{8}$.

9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



10. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1280$ К, $a = -10$ К/мин^2, $b = 120$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

11. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 12 вопросов теста, а Ваня — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 1 час 50 минут. Сколько вопросов содержал тест?



12. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.

13. В июле 2026 года был взят кредит в банке сроком на четыре года на сумму 20 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2027 и 2028 годов долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2029 и 2030 годов долг возрастает на $2r$ % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем;
– к июлю 2030 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите r если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 33 млн рублей.

Часть 2

14. а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM=3MA_1, A_1K=KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α если все ребра призмы равны 16.

16. Решите неравенство: $\frac{\log^2{}_2 x-3\log_2 x+2}{\log_{0,25}(0{,}04\cdot 5^x)}\geq 0$.

17. Источник постоянного напряжения электродвижущую силу $\varepsilon=50$ В и внутреннее сопротивление $r=10$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома: $I=\frac{\varepsilon}{r+R}$, где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P=I^2R$ (закон Джоуля–Ленца). При каком сопротивлении нагрузки R выделяемая на источнике тепловая мощность P наибольшая?

18. Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $\angle ANB=2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB если известно, что $AC=10$ и $AB=22$.

19. Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение

$$(x-2)a^2-(x^3-x^2-4)a+x^4-4x^2=0$$

имеет ровно два различных корня.

20. Есть 4 камня, каждый массой 5 тонн, и 13 камней, каждый массой 14 тонн.

а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 6 тонн?

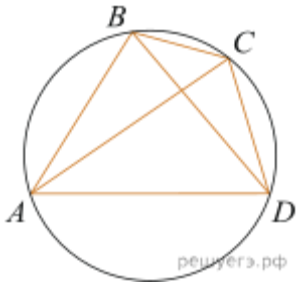
б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?

в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?

ОТВЕТЫ

Часть 1

1. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *ABC* равен 110°, угол *ABD* равен 70°. Найдите угол *CAD*. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 40

2. Даны векторы $\vec{a}(2; 0)$ и $\vec{b}(1; 4)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ответ: 13

3. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 4, боковое ребро равно 13. Найдите ее объем.

Ответ: 408

4. В группе туристов 300 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолёта.

Ответ: 0,05

5. При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: 0,81

6. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета составляет 70 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш (в рублях)	5	10	200	1000
Количество билетов	500	450	40	10

Ответ: 45

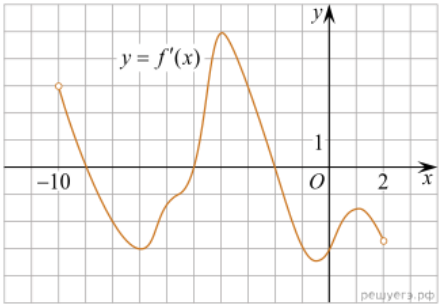
7. Найдите корень уравнения $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9^x$.

Ответ: 0

8. Найдите значение выражения $4\sqrt{2} - 8\sqrt{2}sin^2\frac{7\pi}{8}$.

Ответ: 4

9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Ответ: 5

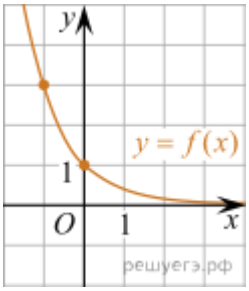
10. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1280$ К, $a = -10$ К/мин^2, $b = 120$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 4

11. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 12 вопросов теста, а Ваня — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 1 час 50 минут. Сколько вопросов содержал тест?

Ответ: 55

12. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ: 81

13. В июле 2026 года был взят кредит в банке сроком на четыре года на сумму 20 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе 2027 и 2028 годов долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

– в январе 2029 и 2030 годов долг возрастает на $2r$ % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем;

– к июлю 2030 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите r если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 33 млн рублей.

Ответ: 20

Решение:

Пусть S млн рублей $= 20$ млн рублей, $k = \frac{r}{100}$. Так как в течение всего срока кредита долг уменьшается на одну и ту же сумму, то каждый год выплачивается одинаковая часть долга и начисленные проценты.

Тогда можно составить следующую таблицу, отслеживающую изменения долга (все вычисления ведутся в млн рублей):

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
2027	S	$S + k \cdot S$	$0{,}25S + k \cdot S$	$0{,}75S$
2028	$0{,}75S$	$0{,}75S + k \cdot 0{,}75S$	$0{,}25S + k \cdot 0{,}75S$	$0{,}5S$
2029	$0{,}5S$	$0{,}5S + 2k \cdot 0{,}5S$	$0{,}25S + 2k \cdot 0{,}5S$	$0{,}25S$
2030	$0{,}25S$	$0{,}25S + 2k \cdot 0{,}25S$	$0{,}25S + 2k \cdot 0{,}25S$	0

Найдем k, зная сумму всех выплат:

$$33 = 4 \cdot 0{,}25S + kS(1 + 0{,}75 + 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}25)$$
$$33 = 20 + k \cdot 20 \cdot 3{,}25$$
$$13 = k \cdot 65$$
$$1 = 5k$$
$$k = 0.2$$

Отсюда получаем:

$$r = 100 \cdot k = 100 \cdot 0{,}2 = 20.$$

Часть 2

Часть 2. Решения и ответы

14. а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

Решение:

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos x=0.$$

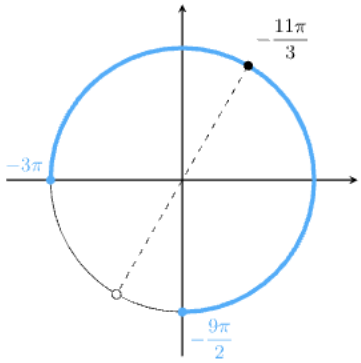
Распишем косинус разности:

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos x=0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$$
$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$$
$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0\ |:\cos x\neq 0$$
$$\operatorname{tg}x=\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{9\pi}{2};-3\pi\right]$ лежит точка $-\frac{11\pi}{3}$.

Ответ:

а) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{3}$

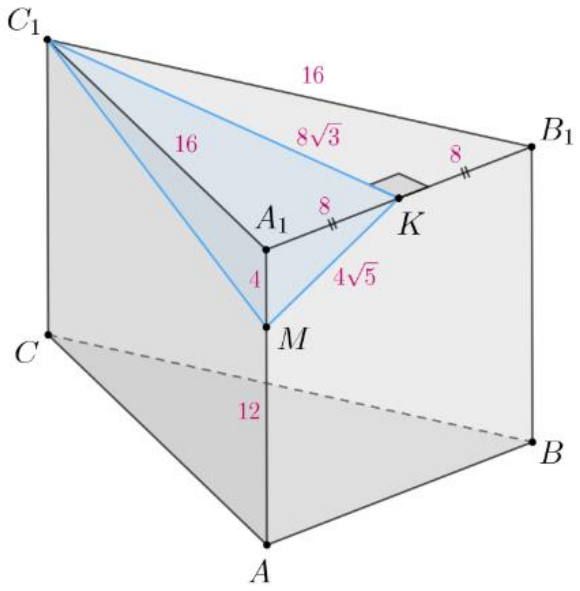
15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1, A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α если все ребра призмы равны 16.

Решение:

а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ – равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.
Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.
Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.
Так как $\alpha \perp (ABB_1), K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Так как все ребра призмы равны 16, то $MA_1 = 4, AM = 12, A_1K = KB_1 = 8$.
Пусть h – искомое расстояние от A_1 до плоскости α.
Применим метод объемов. Распишем объем пирамиды C_1A_1KM двумя способами:

$$\frac{1}{3} \cdot C_1K \cdot S_{A_1MK} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{C_1MK}$$

$$h = C_1K \cdot \frac{S_{A_1MK}}{S_{C_1MK}}$$

Так как $\triangle A_1MK$ – прямоугольный, то имеем:

$$S_{A_1MK} = \frac{1}{2} \cdot A_1M \cdot A_1K = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$$

Так как $C_1K \perp (ABB_1)$, то прямая C_1K перпендикулярна любой прямой из данной плоскости, в частности, $C_1K \perp MK$. Тогда $\triangle C_1MK$ – прямоугольный.
По теореме Пифагора для $\triangle A_1KC_1$:

$$C_1K^2 = A_1C_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 16^2 - 8^2 = 3 \cdot 8^2$$
$$C_1K = 8\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1KM$:

$$KM^2 = A_1K^2 + A_1M^2$$
$$KM^2 = 8^2 + 4^2 = 5 \cdot 4^2$$
$$KM = 4\sqrt{5}$$

Тогда площадь $\triangle C_1MK$ равна:

$$S_{C_1MK} = \frac{1}{2} \cdot C_1K \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{15}$$

Теперь можем найти h :

$$h = C_1K \cdot \frac{S_{A_1MK}}{S_{C_1MK}} = 8\sqrt{3} \cdot \frac{16}{16\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Ответ:
б) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

16. Решите неравенство: $\frac{\log^2{}_2 x-3\log_2 x+2}{\log_{0,25}(0{,}04\cdot 5^x)} \geq 0.$

Решение:

Запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{0,25}(0{,}04 \cdot 5^x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Преобразуем неравенство на ОДЗ:

$$\frac{(\log_2 x - 2) \cdot (\log_2 x - 1)}{\log_{0,25}(0{,}04 \cdot 5^x)} \geqslant 0$$

$$\frac{(\log_2 x - \log_2 4) \cdot (\log_2 x - \log_2 2)}{\log_{0,25}(0{,}04 \cdot 5^x)} \geqslant 0.$$

По методу рационализации получаем:

$$\frac{(2-1)(x-4)(2-1)(x-2)}{(0{,}25-1)(0{,}04 \cdot 5^x - 1)} \geqslant 0$$

$$\frac{(x-4)(x-2)}{0{,}04 \cdot 5^x - 1} \leqslant 0$$

$$\frac{(x-4)(x-2)}{5^x - 5^2} \leqslant 0.$$

По методу рационализации получаем:

$$\frac{(x-4)(x-2)}{(5-1)(x-2)} \leqslant 0$$

$$\frac{(x-4)(x-2)}{x-2} \leqslant 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Получили $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 4]$.
С учётом ОДЗ получаем:

$$x \in (0; 2) \cup (2; 4].$$

Ответ:
$(0; 2) \cup (2; 4]$

17. Источник постоянного напряжения электродвижущую силу $\varepsilon = 50$ В и внутреннее сопротивление $r = 10$ Ом. Сила тока в цепи при подключении к этому источнику нагрузки определяется законом Ома: $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$, где R – сопротивление нагрузки (в омах). Тепловая мощность в ваттах, выделяемая на нагрузке, равна $P = I^2R$ (закон Джоуля–Ленца). При каком сопротивлении нагрузки R выделяемая на источнике тепловая мощность P наибольшая?

Решение:

Используя данные в условии формулы, выразим выделяемую тепловую мощность через ЭДС и сопротивления:

$$P = \left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}.$$

Подставив значения $\varepsilon = 50$ В и $r = 10$ Ом, получим функцию, зависящую только от R:

$$P(R) = \frac{50^2 R}{(10+R)^2} = \frac{2500R}{(R+10)^2}.$$

Поскольку сопротивление нагрузки не может быть отрицательным, будем рассматривать поведение функции $P(R)$ при $R \geqslant 0$.
Найдём производную этой функции:

$$P'(R) = 2500 \cdot \frac{1 \cdot (R+10)^2 - R \cdot 2(R+10)}{(R+10)^4} =$$

$$= 2500 \cdot \frac{(R+10)((R+10) - 2R)}{(R+10)^4} =$$

$$= 2500 \cdot \frac{(R+10)(10-R)}{(R+10)^4} = \frac{2500 \cdot (10-R)}{(R+10)^3}.$$

Найдем нули производной:

$$P'(R) = \frac{2500 \cdot (10-R)}{(R+10)^3} = 0.$$

Решим полученное уравнение:

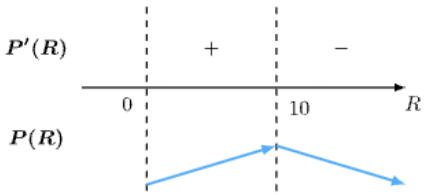
$$\frac{2500 \cdot (10-R)}{(R+10)^3} = 0$$

$$2500 \cdot (10-R) = 0$$

$$10 - R = 0$$

$$R = 10.$$

Заметим, что других критических точек функция $P(R)$ при $R \geqslant 0$ не имеет.
Найдем знаки производной на каждом из промежутков:



Производная положительна при $0 \leqslant R < 10$ и отрицательна при $R > 10$. Значит, функция $P(R)$ возрастает на отрезке $[0; 10]$ и убывает на луче $[10; +\infty)$. Следовательно, функция $P(R)$ достигает наибольшего значения при $R = 10$ Ом.

Ответ: 10 Ом

18. Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

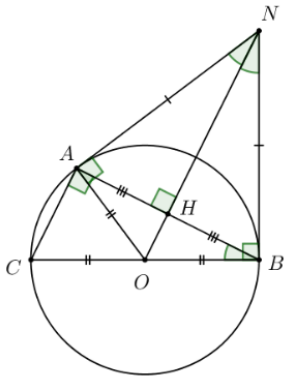
а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB если известно, что $AC = 10$ и $AB = 22$.

Решение:

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, так как он равноудален от сторон этого угла. Тогда NO — биссектриса угла ANB. Также центр O лежит на диаметре BC.
Рассмотрим четырехугольник $ANBO$. В нем $\angle OAN = 90^\circ = \angle OBN$, так как радиусы OA и OB, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательным NA и NB соответственно. Значит, сумма противоположных углов четырехугольника $ANBO$ равна 180°, следовательно, $ANBO$ — вписанный. Тогда $\angle ANO = \angle ABO$ как углы, опирающиеся на одну дугу описанной около этого четырехугольника окружности.
Таким образом,

$$\angle ANB = 2\angle ANO = 2\angle ABO = 2\angle ABC.$$



б) В прямоугольном треугольнике ABC имеем:

$$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}.$$

Пусть H — точка пересечения AB и NO. Заметим, что $NA = NB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, а значит, треугольник ANB — равнобедренный. Поэтому его биссектриса из вершины N также является высотой и медианой, то есть $\angle AHN = 90^\circ$ и $AH = BH = 11$.
Тогда в прямоугольном треугольнике ANH имеем:

$$\frac{AH}{NH} = \operatorname{tg}\angle ANH = \operatorname{tg}\angle ABC = \frac{5}{11}$$

$$NH = \frac{11AH}{5} = \frac{121}{5} = 24{,}2.$$

Ответ: б) 24,2

19. Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение $(x-2)a^2-(x^3-x^2-4)a+x^4-4x^2=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение:

Разложим на множители:

$$x^3-x^2-4=(x-2)(x^2+x+2),$$
$$x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x-2)(x+2)$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x-2)a^2-(x-2)(x^2+x+2)a+x^2(x-2)(x+2)=0,$$
$$(x-2)\left(a^2-(x^2+x+2)a+x^2(x+2)\right)=0$$

Рассмотрим квадратный относительно a трехчлен

$$a^2-(x^2+x+2)a+x^2(x+2).$$

По теореме Виета его корни a_1, a_2, если они существуют, должны удовлетворять условиям

$$a_1+a_2=x^2+x+2,$$
$$a_1\cdot a_2=x^2(x+2)$$

Заметим, что числа x^2 и $x+2$ как раз имеют такую сумму и такое произведение:

$$x^2+(x+2)=x^2+x+2,$$
$$x^2(x+2)=x^2(x+2)$$

Следовательно, по теореме Виета

$$a_1=x^2,$$
$$a_2=x+2$$

Значит,

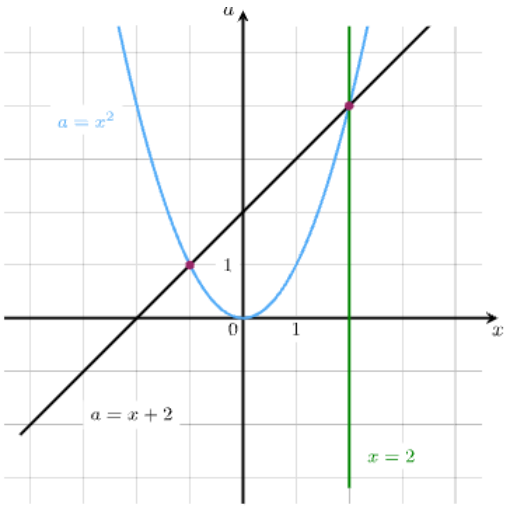
$$a^2-(x^2+x+2)a+x^2(x+2)=(a-x^2)(a-x-2).$$

Тогда исходное уравнение равносильно

$$(x-2)(a-x^2)(a-x-2)=0.$$

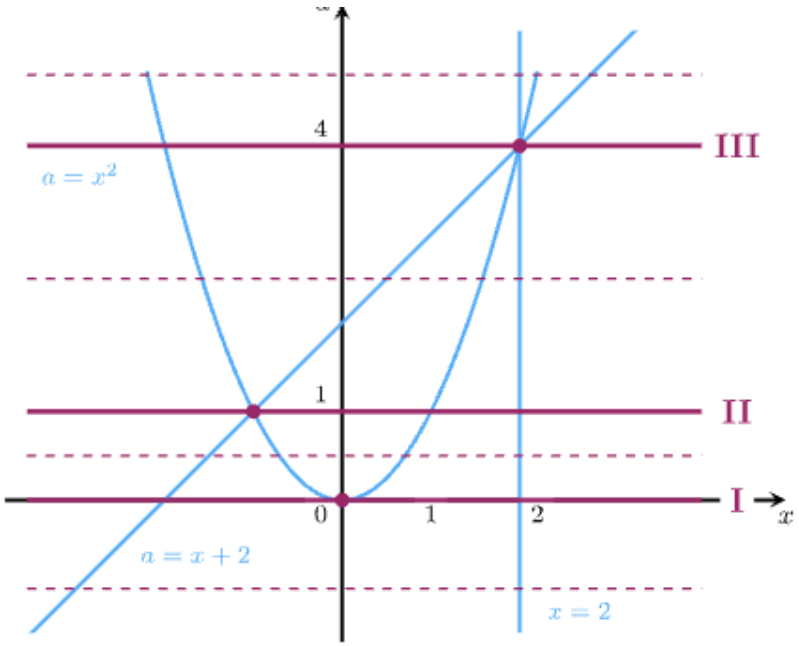
Построим в плоскости xOa графики

$$x=2,\quad a=x^2,\quad a=x+2.$$



Начнем двигать прямую $a = const$ снизу вверх.

- **Случай I**. Прямая касается параболы $a = x^2$, то есть проходит через точку $(0; 0)$.
  Это положение достигается при $a = 0$.
  При этом уравнение имеет три различных решения:
  $$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2.$$
  До случая I, то есть при $a < 0$, прямая $a = const$ пересекает только график $a = x + 2$, а также всегда имеется корень $x = 2$.
  Следовательно, при $a < 0$ уравнение имеет ровно два различных решения.
- **Случай II**. Прямая проходит через точку пересечения графиков $a = x^2$ и $a = x + 2$, то есть через точку $(-1; 1)$.
  Это положение достигается при $a = 1$.
  При этом уравнение имеет три различных решения:
  $$x = -1, \quad x = 1, \quad x = 2.$$
  Между случаями I и II, то есть при $0 < a < 1$, прямая пересекает параболу в двух точках, прямую $a = x + 2$ еще в одной точке, и дополнительно всегда есть корень $x = 2$.
  Значит, при $0 < a < 1$ уравнение имеет более двух решений.
- **Случай III**. Прямая проходит через точку $(2; 4)$, в которой пересекаются все три графика:
  $$x = 2, \quad a = x^2, \quad a = x + 2.$$
  Это положение достигается при $a = 4$.
  При этом уравнение имеет ровно два различных решения:
  $$x = -2, \quad x = 2.$$
  Между случаями II и III, то есть при $1 < a < 4$, прямая пересекает параболу в двух точках, прямую $a = x + 2$ еще в одной точке, и дополнительно всегда есть корень $x = 2$.
  Значит, при $1 < a < 4$ уравнение имеет более двух решений.
  После случая III, то есть при $a > 4$, прямая также дает более двух решений.



Следовательно,

$$a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}.$$

Ответ:

$(-\infty; 0) \cup \{4\}$

20. Есть 4 камня, каждый массой 5 тонн, и 13 камней, каждый массой 14 тонн.

а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 6 тонн?

б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?

в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?

Решение:

а) Вычислим общую массу камней:

$$4 \cdot 5 + 13 \cdot 14 = 20 + 182 = 202 \text{ тонны.}$$

Пусть масса камней в первой группе равна x тонн, а во второй — y тонн. Тогда $x - y = 6$ и $x + y = 202$. Решаем систему:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 202 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 208 \\ x + y = 202 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 104 \\ y = 98 \end{cases}$$

Число 98 можно разложить на множители: $98 = 14 \cdot 7$. Теперь можно построить пример.

Рассуждения выше можно не писать в решении на экзамене. Они приведены для того, чтобы читатель понял логику построения примера.

Пусть в первой группе 4 камня по 5 тонн и 6 камней по 14 тонн. Тогда масса группы равна

$$4 \cdot 5 + 6 \cdot 14 = 20 + 84 = 104 \text{ тонн}$$

Значит, во второй группе остались только 7 камней по 14 тонн, то есть её масса равна $7 \cdot 14 = 98$ тонн. Тогда разность масс групп равна $104 - 98 = 6$ тонн.

б) Суммарная масса всех камней равна 202 т. Значит, если массы групп равны, то они равны 101 тонне.

Пусть в первой группе a камней по 5 тонн и b камней по 14 тонн.

Следовательно, масса первой группы равна $5a + 14b = 101$ тонна. Тогда a — нечетное. Значит, в одной из групп 1 камень в 5 тонн, а в другой — 3 камня по 5 тонн. Не умаляя общности, пусть $a = 1$. Тогда $14b = 101 - 5 = 96$. Но 96 не делится нацело на 14.

Значит, массы двух этих групп камней не могут быть равны.

в) Вычислим разность групп, если в первой группе a камней по 5 тонн и b камней по 14 тонн; во второй группе $4 - a$ камней по 5 тонн и $13 - b$ камней по 14 тонн:

$$\begin{aligned} &5a + 14b - ((4 - a) \cdot 5 + (13 - b) \cdot 14) = \\ &= 5a + 14b - (20 - 5a + 182 - 14b) = \\ &= 10a + 28b - 202 = 2\,(5a + 14b - 101) \end{aligned}$$

Тогда надо найти минимум выражения $2|5a + 14b - 101|$ при $0 \leqslant a \leqslant 4, 0 \leqslant b \leqslant 13$. Будем перебирать значения a.

- Если $a = 0$, то минимум выражения $2|14b - 101|$ достигается при $b = 7$ и равен 6.
- Если $a = 1$, то минимум выражения $2|14b - 96|$ достигается при $b = 7$ и равен 4.
- Если $a = 2$, то минимум выражения $2|14b - 91|$ достигается при $b = 6$ и равен 14.
- Если $a = 3$, то минимум выражения $2|14b - 86|$ достигается при $b = 6$ и равен 4.
- Если $a = 4$, то минимум выражения $2|14b - 81|$ достигается при $b = 6$ и равен 6.

Таким образом, минимальная разность равна 4 тоннам. Достигается она в случае, если в первой группе 1 камень в 5 тонн и 7 камней по 14 тонн, тогда масса первой группы будет равна 103 тонны. Во второй группе 3 камня по 5 тонн и 6 камней по 14 тонн, а ее масса равна 99 тонн. Тогда их разность равна $103 - 99 = 4$ тонны.

Ответ:

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 4 тонны